Лекция 3

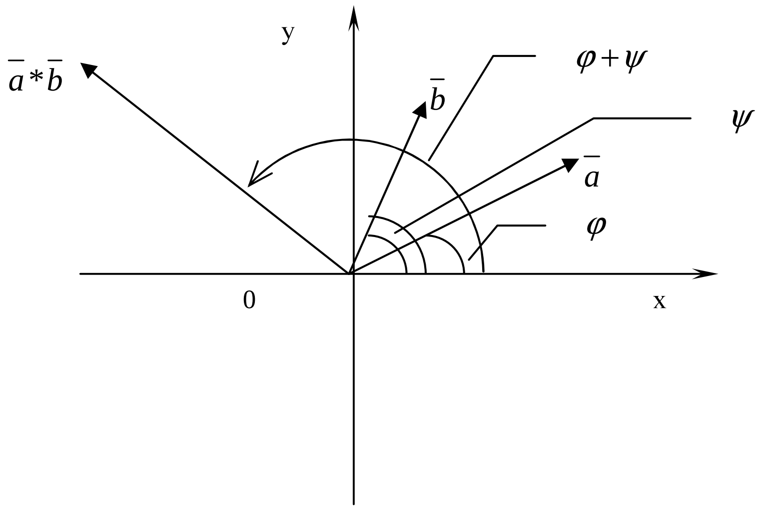
Конформные отображения

Пусть дана функция $w=f(z)$ (иначе $w=w(z)$)
Продифференцируем:
$dw = w'(z)dz$
Рассмотрим комплексные числа:
$a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$b = R(\cos\psi + i\sin\psi)$

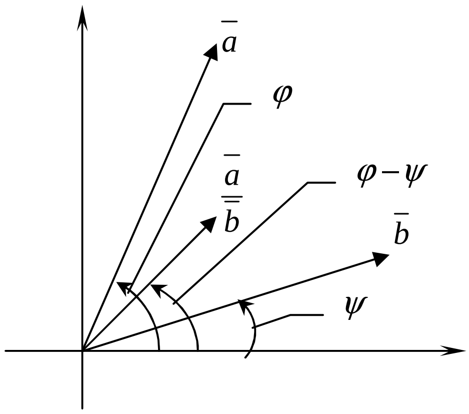
$$a\cdot b = rR(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = rR(\cos\varphi\cos\psi + i\cos\varphi\sin\psi + i\sin\varphi\cos\psi -$$
$$-\sin\varphi\sin\psi) = rR(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$$

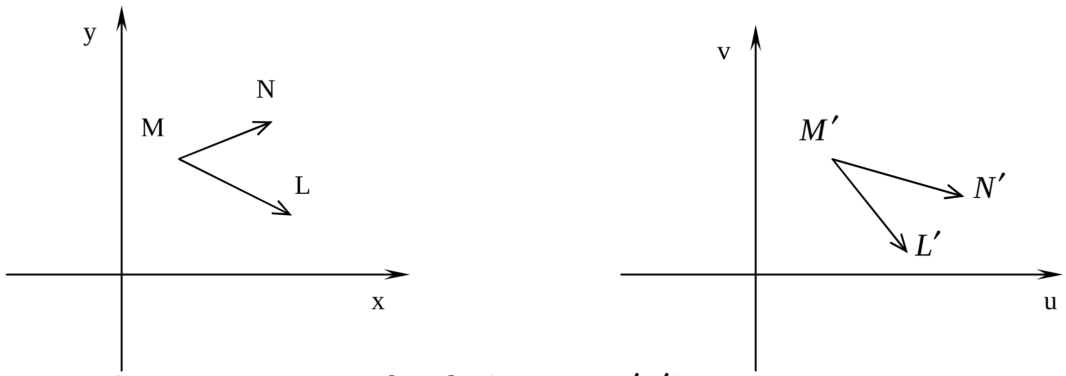
Геометрически это можно изобразить так:



$$\frac{a}{b} = \frac{r}{R}\left(\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\psi + i\sin\psi}\right) = \frac{r}{R}\left(\frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi - i\sin\psi)}{(\cos\psi + i\sin\psi)(\cos\psi - i\sin\psi)}\right) =$$
$$= \frac{r}{R}\frac{\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi + i(\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi)}{\sin^2\psi + \cos^2\psi} = \frac{r}{R}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi))$$

Геометрически это можно изобразить так:





Рассмотрим преобразование вектора *dz* в *dw* ($\mathbf{MN}$ в $\mathbf{M'N'}$). Вектор $\mathbf{MN}$ имеет модуль *R* и аргумент ψ. В точке *M* производная $w'(z)$ имеет модуль *r* и аргумент φ. Поэтому в результате конформного отображения вектор $\mathbf{MN}$ поворачивается против часовой стрелки на угол φ, а его модуль увеличивается в *r* раз. Вектор $\mathbf{MN}$ был выбран произвольно, но при условии, что он лежит в малой окрестности точки *M*. Выберем другой вектор $\mathbf{ML}$, повёрнутый относительно $\mathbf{MN}$ на угол θ. Вектор $\mathbf{M'L'}$ является отображением вектора $\mathbf{ML}$ и будет повёрнут относительно $\mathbf{ML}$ на угол φ против часовой стрелки.

Рассмотрим угол между $\mathbf{M'L'}$ и $\mathbf{M'N'}$. В силу того, что $\mathbf{M'L'}$ и $\mathbf{M'N'}$ получились в результате поворота исходных векторов на один угол (φ), угол между $\mathbf{M'L'}$ и $\mathbf{M'N'}$ будет равен углу между исходными векторами $\mathbf{MN}$ и $\mathbf{ML}$, то есть углу θ.

Следовательно, *при конформном отображении сохраняется угол между векторами.*

Геометрический смысл модуля аргумента производной функции комплексного переменного: векторы в точке M растягиваются в r раз, а аргумент поворачивает эти векторы на φ *радиан против часовой стрелки.*

Если в некоторой точке области *D* функция *f*(*z*) непрерывна и имеет непрерывную производную, то функция называется *регулярной* в этой точке. Если функция *f*(*z*) регулярна во всех точках области *D*, то такая функция называется *голоморфной* в этой области.

Некоторые основные элементарные функции комплексного переменного

Степенная функция

$w=f(z)=z^n$, где n – целое положительное число.

$z^2 = zz = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$

$z^3 = zzz = z^2 z = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$

....

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

$z^{n+1} = z^n z = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$

$= r^{n+1}(\cos n\varphi\cos\varphi + i\cos n\varphi\sin\varphi + i\sin n\varphi\cos\varphi - \sin n\varphi\sin\varphi) = r^{n+1}(\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi)$

Нужно вектор, соответствующий числу z, повернуть против часовой стрелки на угол $(n-1)\varphi$, а длину увеличить в r^{n-1} раз.

Дробно-линейная функция

$w=az+b$ – линейная функция (a, b - комплексные постоянные).

$w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ - дробно-линейная функция (a, b, c, d - комплексные постоянные).

Дробно-линейная функция позволяет решить задачу о нахождении конформного отображения круга на круг, полуплоскости на полуплоскость, круга на полуплоскость.